

UNIVERSITE DE RENNES I
UER de Mathématiques et Informatique
Campus de Beaulieu
35042 - Rennes Cedex

PUBLICATION DES SEMINAIRES
DE MATHÉMATIQUES
SEMINAIRE DE PROBABILITES

RENNES 1984

QUELQUES MATERIAUX POUR L'HISTOIRE
DE LA THEORIE DES MARTINGALES (1920-1940)
Exposé de Pierre CREPEL le 05.11.1984

I - INTRODUCTION p. 3-12

- a) Le "corpus classique"
- b) Les martingales dans le "folklore" des mathématiciens vers 1920-1930
- c) L'ambiance probabiliste des années 1920-1930
- d) "Martingale" : une notion qui monte de partout
- e) Présentation de la suite

II - LES ARTICLES DE SERGE BERNSTEIN p. 13-28

- a) Liste des travaux
- b) Brèves remarques biographiques
- c) Description des articles : c_1 : ceux des années 20
 c_2 : ceux des années 30-40

III - LES TRAVAUX DE PAUL LEVY p. 29-41

- a) Liste des publications
- b) Sur la genèse de ses idées
- c) Description des mémoires
- d) Brèves remarques

IV - LA THESE DE JEAN VILLE p. 42-53

- a) Travaux cités
- b) Indications biographiques
- c) Précisions et description de la Thèse

.../...

V - L'ARTICLE DE DOOB DE 1940 p. 54-62

- a) Travaux cités
- b) Remarques diverses
- c) Sur les publications de J.-L. DOOB avant 1940
- d) L'article-clé

VI - REMARQUES ET QUESTIONS p. 63-64

BIBLIOGRAPHIE COMPLÉMENTAIRE p. 65-66

I - INTRODUCTION

Cet exposé, un peu "érudit et technique" n'est qu'une étape pour servir à l'histoire des martingales : l'étape la plus facile pour un mathématicien, celle qui consiste à décrire les aspects explicites du développement de cette notion dans l'entre-deux-guerres. Le travail le plus intéressant reste à faire, on en dira ici seulement quelques mots en remarque.

L'article qui suit est écrit dans des termes familiers aux probabilistes d'aujourd'hui, et nous espérons que, si limité soit-il dans ses ambitions, il pourra leur être utile.

a) Le "corpus classique"

Quand on parle de "martingale" à un mathématicien de ces dernières décennies (éduqué dans l'esprit du livre de J.L. DOOB de 1953, "Stochastic processes"), cela évoque en gros les idées que voici :

Définition : on appelle "martingale" une famille (*) de variables aléatoires (v.a.) (S_t) , indexée en général par le temps $(t \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{Z})$, adaptée à une famille croissante de tribus \mathcal{F}_t , et telle que

$$E(S_t / \mathcal{F}_s) = S_s \quad \text{p.s. pour } s \leq t$$

L'exemple le plus classique est celui où $S_n = u_1 + \dots + u_n$, (u_n) désignant une suite de v.a. indépendantes et centrées.

Mais on pense aussi à d'autres exemples typiques : si S est une v.a. et si \mathcal{F}_t est une famille croissante de tribus, $S_t = E(S / \mathcal{F}_t)$ est une martingale. Il y en a d'autres qui sont devenues classiques, celle qui donne la dérivée d'une mesure, ou bien encore en statistiques le rapport de vraisemblance, etc. N.B. Toutes les définitions et tous les théorèmes énoncés ici ne sont exprimés ni sous les formes les plus rigoureuses, ni dans leur généralité maximale.

(*) Cette famille est d'ailleurs plutôt notée $x(t)$: l'exposé fera comprendre simplement cette différence de notation significative.

